GABARITO ESCOLA NAVAL - 2017/2018
PROVA AMARELA
MATEMÁTICA / FÍSICA

01.	D	**11.**	A	**21.**	E	**31.**	B
02.	E	**12.**	B	**22.**	D	**32.**	C*
03.	D	**13.**	A	**23.**	C	**33.**	B
04.	E	**14.**	B	**24.**	D	**34.**	C*
05.	D	**15.**	D	**25.**	B	**35.**	ANULADA
06.	A	**16.**	C	**26.**	E	**36.**	B
07.	A	**17.**	B	**27.**	E	**37.**	ANULADA
08.	C	**18.**	E	**28.**	A	**38.**	D
09.	A	**19.**	B	**29.**	D	**39.**	A
10.	E	**20.**	E	**30.**	A	**40.**	D

* Questões passíveis de anulação.

GABARITO COMENTADO – PROVA AMARELA

PROVA DE MATEMÁTICA

Professores:
Anderson Izidoro
Brito
Bruno Pedra
Carlos Eduardo (Cadu)
Êurope
Rafael Sabino
Thiago Esquian

01. Solução: Letra D.

Primeiro resolvemos o determinante,

$$k=\begin{vmatrix}1+a & 1 & 1 & 1\\ 1 & 1-a & 1 & 1\\ 1 & 1 & 1+b & 1\\ 1 & 1 & 1 & 1-b\end{vmatrix}=-\begin{vmatrix}1 & 1 & 1 & 1+a\\ 1 & 1-a & 1 & 1\\ 1 & 1 & 1+b & 1\\ 1-b & 1 & 1 & 1\end{vmatrix}$$

$$k=-\begin{vmatrix}-a & 0 & -a\\ 0 & b & -a\\ b & b & b-a+ab\end{vmatrix}=ab\begin{vmatrix}1 & 0 & 1\\ 0 & 1 & -a\\ b & 1 & b-a+ab\end{vmatrix}$$

$$k=ab(b-a+ab-b+a)=a^2b^2=7$$

Precisamos encontrar o coeficiente de $x^{k-1}=x^6$, para isso reescreveremos a expressão

$$\left(2x+\frac{1}{x^2}\right)^3\left(x^2+\frac{1}{2x}\right)^3=\frac{(2x^3+1)^6}{8x^9}$$

, ou seja, o coeficiente x^6 vai ser dado pelo coeficiente de x^{15}, em $(2x^3+1)^6$.

$$T_{p+1}=T_{5+1}=\binom{6}{5}.(2x^3)^5.1^{6-5}=192x^{15}\quad\Rightarrow\quad\frac{192x^{15}}{8x^9}=24x^6$$

02. Solução: Letra E.

Dada uma elipse de equação $\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1$, sua relação fundamental é a expressão $a^2=b^2+c^2$, ou seja,

$$e = \frac{c}{a} = \frac{\sqrt{a^2 - b^2}}{a}$$

$$e^2 = \frac{a^2 - b^2}{a^2} \quad \Leftrightarrow \quad a^2e^2 = a^2 - b^2 \quad \Leftrightarrow \quad b^2 = a^2\left(1 - e^2\right)$$

Sejam os focos escritos em função de a e b e o ponto P em função de a, b e x, temos que

$$F_1 = (-\sqrt{a^2 - b^2}, 0), \quad F_2 = (\sqrt{(ab)^2}, 0) \quad e \quad P\left(x, \sqrt{b^2 - \frac{(bx)^2}{a^2}}\right)$$

O produto escalar é dado por

$$\overrightarrow{PF_1} \,.\, \overrightarrow{PF_2} = \left(x + \sqrt{a^2 - b^2}, \sqrt{b^2 - \frac{(bx)^2}{a^2}}\right).\left(x - \sqrt{a^2 - b^2}, \sqrt{b^2 - \frac{(bx)^2}{a^2}}\right)$$

$$\overrightarrow{PF_1} \,.\, \overrightarrow{PF_2} = x^2 - \left(a^2 - b^2\right) + b^2 - \frac{(bx)^2}{a^2}$$

$$\overrightarrow{PF_1} \,.\, \overrightarrow{PF_2} = x^2 - a^2e^2 + a^2\left(1 - e^2\right)\left(1 - \frac{x^2}{a^2}\right)$$

$$\overrightarrow{PF_1} \,.\, \overrightarrow{PF_2} = e^2x^2 + a^2\left(1 - 2e^2\right)$$

---

03. Solução: Letra D.

Primeiramente vamos calcular as derivadas de f(x):

$f'(x) = 1 + \frac{1}{x}$ e $f''(x) = -\frac{1}{x^2}$

Como g(x) é a inversa de f(x), temos que $g(f(x)) = x$. Derivando implicitamente esta equação temos

(I) $g'(f(x)) \cdot f'(x) = 1$.

Derivando novamente chegamos a

(II) $g''(f(x)) \cdot f'(x) \cdot f'(x) + g'(x) \cdot f''(x) = 0$

Agora notemos que $f(1) = 1$, $f'(1) = 2$ e $f''(1) = -1$.

Fazendo $x = 1$ em (I) temos:

$g'(f(1))\cdot f'(1)=1\Rightarrow$

$g'(1)\cdot 2=1$

$g'(1)=\dfrac{1}{2}$

Finalmente, fazendo $x=1$ em

$g''(f(1))\cdot f'(1)\cdot f'(1)+g'(1)\cdot f''(1)=0$

$g''(1)\cdot 2\cdot 2+\dfrac{1}{2}\cdot(-1)=0$

$g''(x)=\dfrac{1}{8}$

---

04. Solução: Letra E.

No polinômio $P(x)=x^6+bx^5+cx^4+dx^3+ex^2+fx+g$, sabemos que $P(\sqrt{2}+\sqrt[3]{3})=0$, ou seja, $x=\sqrt{2}+\sqrt[3]{3}$ é raiz, então

$x=\sqrt{2}+\sqrt[3]{3} \quad \Rightarrow \quad x-\sqrt{2}=\sqrt[3]{3}$

$\left(x-\sqrt{2}\right)^3=\left(\sqrt[3]{3}\right)^3 \quad \Rightarrow \quad x^3-3\sqrt{2}x^2+6x-2\sqrt{2}=3$

$x^3+6x-3=3\sqrt{2}x^2+2\sqrt{2} \quad \Rightarrow \quad \left(x^3+6x-3\right)^2=\left[\sqrt{2}(3x^2+2)\right]^2$

$x^6+36x^2+9+2(6x^4-3x^3-18x)=2(9x^4+12x^2+4)$

$x^6+36x^2+9+12x^4-6x^3-36x=18x^4+24x^2+8$

$x^6-6x^4-6x^3+12x^2-36x+1=0$

$P(x)=x^6-6x^4-6x^3+12x^2-36x+1$

A divisão de $P(x)$ por x^3-3x-1 determina o polinômio $R(x)$, logo

$P(x)=(x^3-3x-1)\,.\,q(x)+\left(3x^2-54x-4\right)$

$\mathrm{R(x)}=3\mathrm{x}^2-54\mathrm{x}-4 \quad \Rightarrow \quad S=3-54-4=-55$

---

05. Solução: Letra D.

Vamos primeiro reescrever a função para visualizar o conjunto imagem

$f(x)=2cos^2(x)+sen(2x)-1=\left(2cos^2(x)-1\right)+sen(2x)=cos(2x)+sen(2x)$

Podemos fazer a substituição $cos(2x)=sen(90^{o}-2x)$, ou seja,

$$f(x)=sen(90^o-2x)+sen(2x)=2sen\left(\frac{(90^o-2x)+(2x)}{2}\right).cos\left(\frac{(90^o-2x)-(2x)}{2}\right)=2sen(45^o).cos(45^o-2x)$$

$$f(x)=\sqrt{2}.cos(45^o-2x)$$

A imagem de $f(x)$ é $\left[-\sqrt{2},\sqrt{2}\right]$, portanto $a=-\sqrt{2}$ e $b=\sqrt{2}$.

Para acharmos a equação do plano π , deve-se fazer o produto veorial entre $\vec{u}$ e $\vec{v}$ para encontrar o vetor normal ao plano.

$$Det=\begin{vmatrix} i & j & k \\ 0 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 1 \end{vmatrix}=i-k \quad \Rightarrow \quad \vec{n}=i-k=(1,0,-1)$$

A equação do plano $\pi: x-z+d=0$

O plano passa pelo ponto $A(9,-1,0)$, portanto

$$9-0+d=0 \quad \Leftrightarrow \quad d=-9 \quad \Rightarrow \quad \pi: x-z-9=0$$

A distância do plano ao ponto P é dado por:

$$P=\left(\frac{a}{b},a,1\right)=\left(\frac{\sqrt{2}}{-\sqrt{2}},-\sqrt{2},1\right)=\left(-1,-\sqrt{2},1\right)$$

$$d_{\pi,P}=\frac{|ax_o+by_o+cz_o+d|}{\sqrt{a^2+b^2+c^2}}$$

$$d_{\pi,P}=\frac{\left|1.(-1)+0.\left(-\sqrt{2}\right)-(1)-9\right|}{\sqrt{1^2+0^2+(-1)^2}}=\frac{11}{\sqrt{2}}=\frac{11\sqrt{2}}{2}$$

---

06. Solução: Letra A.

Vamos determinar a área da base pelo radical de Heron

$$p=\frac{13+14+15}{2}=21$$

$$S_{base}=\sqrt{p(p-a)(p-b)(p-c)}=\sqrt{21(21-13)(21-14)(21-15)}=84cm^2$$

Conseguimos determinar a altura da pirâmide pelo volume dado

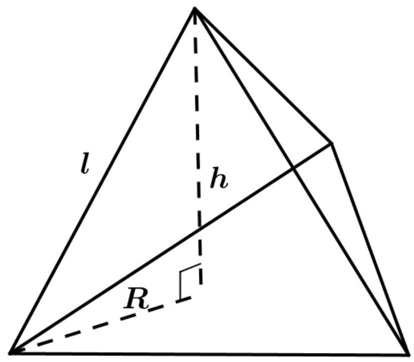
$$V=\frac{1}{3}\cdot S_{base}\cdot h=105\sqrt{22} \quad \Rightarrow \quad \frac{1}{3}\cdot 84\cdot h=105\sqrt{22} \quad \Leftrightarrow \quad h=\frac{15\sqrt{22}}{4}$$

A projeção do vértice da pirâmide no plano da base se dá no ponto equidistante dos vértices do triângulo da base, ou seja, seu circuncentro. Logo vamos determinar, portanto, esse raio.

$$S_{base} = \frac{abc}{4R} = 84 \Rightarrow \frac{13.14.15}{4R} = 84 \Rightarrow R = \frac{65}{8}$$

Conseguimos agora finalizar a questão encontrando l no triângulo retângulo abaixo

$$l^2 = \left(\frac{65}{8}\right)^2 + \left(\frac{15\sqrt{22}}{4}\right)^2 \Rightarrow l = \frac{155}{8}$$



07. Solução: Letra A.

(FALSA) Tomando $P=(x_o,y_o)$ um ponto de interseção das curvas. Seja r a reta que contém P e é tangente à parábola e a reta s que contém P é tangente à elipse. Temos,

Coeficiente angular de r em P:

$$y = ax^2 \Rightarrow y' = 2ax \Rightarrow m_r = 2ax_o$$

Coeficiente angular de r em P:

$$x^2 + 2y^2 = 2 \Rightarrow 2x + 4y.y' = 0 \Rightarrow y' = -\frac{x}{2y} \Rightarrow m_s = -\frac{x_o}{2y_o}$$

Como P é um ponto pertencente às duas funções, sabemos que

$$y = ax^2 \Rightarrow y_o = ax_o{}^2 \Rightarrow a = \frac{y_o}{x_o{}^2}$$

Para que as duas retas sejam perpendiculares entre si, temos

$$m_r.m_s = 2ax_o.\left(-\frac{x_o}{2y_o}\right) = 2.\left(\frac{y_o}{x_o{}^2}\right).x_o.\left(-\frac{x_o}{2y_o}\right) = -1$$

, ou seja, as retas s e r são sempre paralelas.

(VERDADEIRA)

$$\sim\left(\left(\exists x\in A\right)\left(p\left(x\right)\right)\Rightarrow\left(\forall x\in A\right)\left(\sim q\left(x\right)\right)\right)\ \equiv\ \sim\left(\forall x\in A\right)\left(\sim q\left(x\right)\right)\wedge\left(\exists x\in A\right)\left(p\left(x\right)\right)$$
$$\equiv\left(\exists x\in A\right)\left(q\left(x\right)\right)\wedge\left(\exists x\in A\right)\left(p\left(x\right)\right)$$

(FALSA)

$$M=\int_0^{\pi/2}\frac{1}{1+sen\left(x\right)}dx=\int_0^{\pi/2}\frac{1-sen\left(x\right)}{\left(1+sen\left(x\right)\right)\left(1-sen\left(x\right)\right)}dx=\int_0^{\pi/2}\frac{1-sen\left(x\right)}{1-sen^2x}dx$$
$$M=\int_0^{\pi/2}\frac{1-sen\left(x\right)}{\cos^2 x}dx=\int_0^{\pi/2}\sec^2 x-tgx\cdot\sec x\,dx=\left(tg\left(x\right)-\sec x\right)\Big|_0^{\pi/2}$$
$$M=\lim_{x\to\pi/2}\left(tg\left(x\right)-\sec x\right)-\left(tg\left(0\right)-\sec 0\right)=1$$

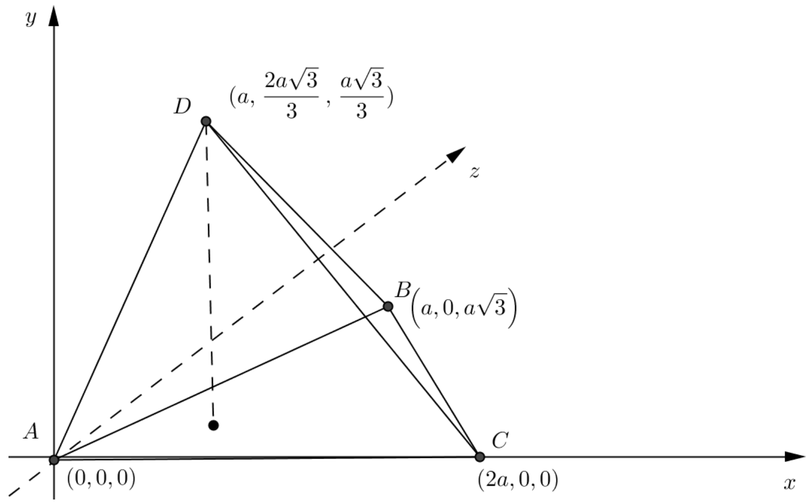
(FALSA) Olhemos para um contraexemplo, $x=i$. Seu argumento é $\theta=\frac{\pi}{2}$, ou seja,

$$\left|e^{i\cdot i}\right|=\frac{1}{e}\neq e^{|i|\cdot sen\left(\frac{\pi}{2}\right)}=e.$$

---

08. Solução: Letra C.

Primeiramente posicionamos um dos vértices na origem dos eixos coordenados e adotamos medida da aresta igual a $2a$. Definimos então os vértices do tetraedro no espaço e os vetores pedidos na questão.



$$X=A+m\left(\frac{\overrightarrow{AB}}{3}-\overrightarrow{AC}+\frac{\overrightarrow{AD}}{2}\right)=A+m\left(\frac{B-A}{3}-\left(C-A\right)+\frac{D-A}{2}\right)=A+m\left(\frac{A}{6}+\frac{B}{3}-C+\frac{D}{2}\right)$$

Como x pertence ao plano BCD, a coordenada y de X é igual a zero ($y_x=0$), ou seja,

$$y_x=\frac{2a\sqrt{6}}{3}+m\frac{a\sqrt{6}}{9}=0\ \Rightarrow\ 2+\frac{m}{3}=0\ \Rightarrow\ -m=6$$

Logo,

$$f'(x)=\frac{3x^3-12x^2-x^3+1}{(x-4)^2} \Leftrightarrow f'(x)=\frac{2x^3-12x^2+1}{(x-4)^2}$$

$$f'(6)=\frac{2.6^3-12.6^2+1}{(6-4)^2}=\frac{1}{4}$$

---

09. Solução: Letra A.

Pelo teorema de L'Hôpital

$$A=\lim_{x\to 0}\frac{\sqrt[3]{(x+3)^2}-\sqrt[3]{9}}{x}=\lim_{x\to 1}\frac{\overline{\;\frac{2}{3.\sqrt[3]{(x+3)}}\;}}{1}=\frac{2}{3\sqrt[3]{3}}=\frac{2\sqrt[3]{9}}{9}$$

Como estamos observando x na vizinhança de 0, tem que $x^2-2<0\ e\ x-2<0$, logo:

$$B=\lim_{x\to 0}\frac{|x^2-2|-|x-2|}{x}=\lim_{x\to 0}\frac{-x^2+2+x-2}{x}=\lim_{x\to 0}\frac{-x^2+x}{x}=1$$

Temos que $-1\le sen\left(\frac{1}{(x-1)^3}\right)\le 1$, logo $-(x-1)^9\le (x-1)^9 sen\left(\frac{1}{(x-1)^3}\right)\le (x-1)^9$ então pelo teorema do confronto temos que:

$$\lim_{x\to 0}-(x-1)^9\le \lim_{x\to 0}(x-1)^9 sen\left(\frac{1}{(x-1)^3}\right)\le \lim_{x\to 0}(x-1)^9 \Leftrightarrow 0\le \lim_{x\to 0}(x-1)^9 sen\left(\frac{1}{(x-1)^3}\right)\le 0$$

Portanto, $C=0$ e $A^{3B}-C=\left(\frac{2\sqrt[3]{9}}{9}\right)^{3.1}-0=\frac{8}{3^4}$

---

10. Solução: Letra E.

I) (FALSA) Olhemos para um contraexemplo, $f(x)=x^3$ com $x\in\mathbb{R}$. A função é estritamente crescente, ou seja, $f'(x)=3.x^2>0$, porém em $x=0$ em $f'(x)=0$.

II) (VERDADEIRA) Se $f(x)=f(x+t)$ então $f(x+t)=f(x+2t)=f(x)$, intuitivamente temos que $f(x)=f(x+kt)$, logo $t'=kt$.

III) (FALSA) Olhemos para um contraexemplo, a função $f(x)=|x|$, para todo $x\in\mathbb{R}$ não é derivável em $x=0$. Note que

$$\lim_{x\to 0^+}\frac{f(x)-f(0)}{x-0}=\frac{|x|-|0|}{x-0}=1$$

$$\lim_{x\to 0^-}\frac{f(x)-f(0)}{x-0}=\frac{|x|-|0|}{x-0}=-1$$

IV) (FALSA) Se é extritamente crescente ou descrescente será injetora, mas não necessariamente sobrejetora.

V) (VERDADEIRA) Se $h(x)=f^2(x)+g^2(x)$, derivando temos $h'(x)=2.f(x).f'(x)+2.g(x).g'(x)$. Como $f'(x)=g(x)$ e $f''(x)=-f(x) \Rightarrow g'(x)=-f(x)$, , logo substituindo temos

$$h'(x)=2.f(x).g(x)+2.g(x).[-f(x)]=0 \Rightarrow h(x)=c$$

Como $h(0)=5$, $c=5 \Rightarrow h(x)=5 \Rightarrow h(10)=5$

---

11. Solução: Letra A.

Seja V_1 o conjunto verdade de $p(x)\to q(x)$, temos que $V_I=C_A(C_AV_q\cap V_P)=V_q\cup C_AV_p$ e $\sim r(x)$ é o conjunto C_AV_r. Logo, o conjunto verdade desejado é dado por

$$(p(x)\to q(x))\vee\sim r(x)=V_I\cup C_AV_r=V_q\cup C_AV_p\cup C_AV_r=C_AV_p(V_q\cup C_AV_r)$$

Nota: a notação C_AB é o conjunto complementar de B em A.

---

12. Solução: Letra B.

Consideremos a assíntota de $f(x)=\sqrt[3]{x^3-x^2}$ como $y=mx+b$.

$$m=\lim_{x\to+\infty}\frac{f(x)}{x}\ ou\ m=\lim_{x\to-\infty}\frac{f(x)}{x}$$

$$m=\lim_{x\to\pm\infty}\frac{\sqrt[3]{x^3-x^2}}{x}=\lim_{x\to\pm\infty}\sqrt[3]{\frac{x^3}{x^3}-\frac{x^2}{x^3}}=\lim_{x\to\pm\infty}\sqrt[3]{1-\frac{1}{x}}$$

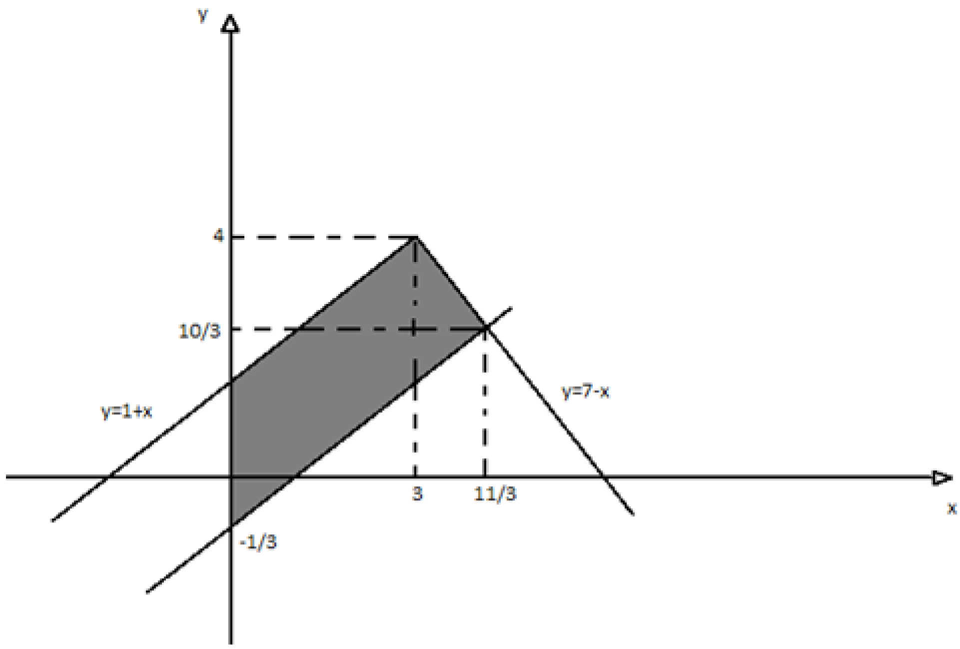
$$b=\lim_{x\to\pm\infty}(f(x)-mx)=\lim_{x\to\pm\infty}\left(\sqrt[3]{x^3-x^2}-x\right)=\lim_{x\to\pm\infty}\left(x\left(\sqrt[3]{1-\frac{1}{x}}-1\right)\right)$$

Utilizando a aproximação de Bernoulli $\sqrt[3]{1-\frac{1}{x}}\cong 1-\frac{1}{3x}$

Logo,

$$b=\lim_{x\to\pm\infty} x.\left(\left(1-\frac{1}{3x}\right)-1\right)=\lim_{x\to\pm\infty}\left(-\frac{1}{3}\right)=-\frac{1}{3}$$

Portanto a equação da assíntota é $y=x-\frac{1}{3}$. Representando no plano cartesiano os gráficos, temos:



Precisamos calcular a área do trapézio hachurado, em que a base menor é a distância entre os pontos (3,4) e (0,1), portanto (b = base menor) b = $3\sqrt{2}$. A base maior é a distância entre os pontos (0,-1/3) e (11/3,10/3), portanto(B = base maior) B = $11\sqrt{2}/3$. A altura do trapézio é igual a distância entre as retas y = x+1 e y = -1/3+x, portanto h = $4\sqrt{2}/6$.

Aplicando a fórmula da área do trapézio:

$S=\frac{(B+b).h}{2}$, temos $S=\frac{\left(\frac{11\sqrt{2}}{3}+3\sqrt{2}\right).\frac{4\sqrt{2}}{6}}{2}=\frac{40}{9}$.

---

13. Solução: Letra A.

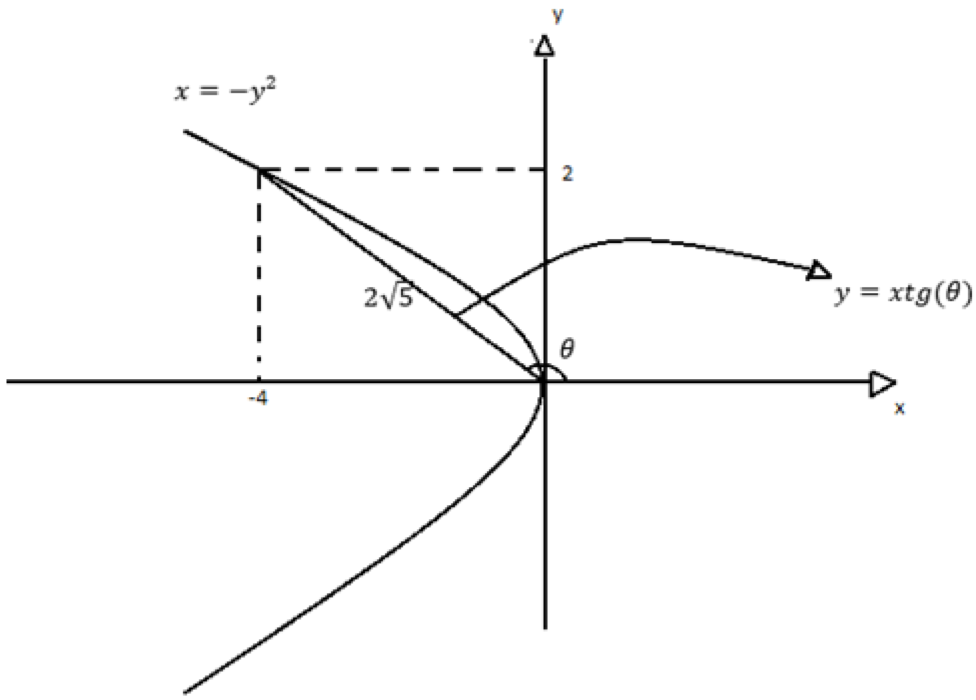
X é o conjunto que contem os p elementos de B e pode ou não conter os outros n – p elementos que estão em A, mas não estão em B. Para a montagem, do conjunto X podemos decidir de duas maneiras para cada um destes n – p elementos (pertencer ou não pertencer), logo:

$$X=\left\{x_1,x_2,x_3...x_p,\underset{2\times}{\_\_},\underset{2}{\_\_},\underset{\times 2}{\_\_}\cdots\underset{2}{\_\_}\right\}$$

Teremos, portanto, 2^{n-p} possibilidades para montagem de X.

14. Solução: Letra B.

Representamos primeiro o gráfico da parábola e a reta da partícula à origem que determina o ângulo θ. Logo,



$$x = -tg^2(\theta).x^2 \quad \Rightarrow \quad 1 = -tg^2(\theta).x \quad \Rightarrow \quad 1 + tg^2(\theta).x = 0$$

Derivando a equação em função do tempo,

$$2tg(\theta).sec^2(\theta)\frac{d\theta}{dt}.x + tg^2(\theta)\frac{dx}{dt} = 0$$

Como $\frac{dx}{dt} = -8$, temos

$$2.\left(-\frac{1}{2}\right).\left(\frac{\sqrt{5}}{2}\right)^2\frac{d\theta}{dt}.(-4) + \left(-\frac{1}{2}\right)^2.(-8) = 0$$

$$5.\frac{d\theta}{dt} = 2 \quad \Rightarrow \quad \frac{d\theta}{dt} = \frac{2}{5}$$

---

15. Solução: Letra D.

Reescrevemos os vértices do triângulo equilátero,

$$i = (0,1), \ \ z = (a,b) \ \ e \ \ iz = (-b,a) \quad \Rightarrow \quad A(0,1), \ B(a,b) \ e \ C(-b,a)$$

Logo,

$$\left|\overrightarrow{AB}\right|=\left|\overrightarrow{AC}\right|=\left|\overrightarrow{BC}\right| \Rightarrow \left|\overrightarrow{AB}\right|^2=\left|\overrightarrow{AC}\right|^2=\left|\overrightarrow{BC}\right|^2 \Rightarrow a^2+(b-1)^2=b^2+(a-1)^2=(a+b)^2+(b-a)^2$$

$$(i)\ -2b+1=-2a+1 \Rightarrow a=b$$

$$(ii)\ b^2+a^2-2a+1=a^2+2ab+b^2+b^2-2ab+a^2 \Rightarrow 2a^2+2a-1=0 \Rightarrow a=\frac{-1\pm\sqrt{3}}{2}$$

, ou seja,

$$z_1=\frac{-1-\sqrt{3}}{2}+\frac{-1-\sqrt{3}}{2}i=\frac{\sqrt{6}+\sqrt{2}}{2}cis\left(\frac{5\pi}{4}\right)$$
$$z_2=\frac{-1+\sqrt{3}}{2}+\frac{-1+\sqrt{3}}{2}i=\frac{\sqrt{6}-\sqrt{2}}{2}cis\left(\frac{\pi}{4}\right)$$

---

16. Solução: Letra C.

Consideremos a população igual P, temos:

Exame com doença (sadia): $1\%.(98,5\%.P)$

Exame com doença (doente): $90\%.(1,5\%.P)$

A probabilidade de ter a doença tendo dado exame positivo é

$$=\frac{90\%.(1,5\%.P)}{1\%.(98,5\%.P)+90\%.(1,5\%.P)}=\frac{90.1,5}{98,5+90.1,5}=\frac{270}{467}$$

---

17. Solução: Letra B.

Primeiro vamos determinar o período da função g,

$$g(x)=\frac{1+tg(x)}{1-tg(x)}=tg\left(x+\frac{\pi}{4}\right) \Rightarrow p=\pi$$

Resolveremos agora a integral por substituição, pois

$sen(x)=\dfrac{2tg\left(\frac{x}{2}\right)}{1+tg^2\left(\frac{x}{2}\right)}$ e $cos(x)=\dfrac{1-tg^2\left(\frac{x}{2}\right)}{1+tg^2\left(\frac{x}{2}\right)}$, chemando $tg\left(\frac{x}{2}\right)=u$ temos que $x=2arctg(u)$.

Derivando temos $dx=\dfrac{2}{1+u^2}du$, substituindo na integral temos

$$\int_a^b f(x)dx = \int_a^b \frac{1}{1-\cos(x)+sen(x)}dx = \int_a^b \frac{1}{1-\frac{1-u^2}{1+u^2}+\frac{2u}{1+u^2}}\cdot\frac{2}{1+u^2}du = \int_a^b \frac{1}{u}du - \int_a^b \frac{1}{u+1}du = lnu - ln(u+1) = ln\left(\frac{u}{u+1}\right) = ln\left(\frac{tg\left(\frac{x}{2}\right)}{tg\left(\frac{x}{2}\right)+1}\right)\Bigg|_a^b$$

Como $a=\frac{\pi}{4}$ e $b=\frac{\pi}{2}$ temos

$$ln\left(\frac{tg\left(\frac{x}{2}\right)}{tg\left(\frac{x}{2}\right)+1}\right)\Bigg|_a^b = ln\left(\frac{tg\left(\frac{\pi}{4}\right)}{tg\left(\frac{\pi}{4}\right)+1}\right) - ln\left(\frac{tg\left(\frac{\pi}{8}\right)}{tg\left(\frac{\pi}{8}\right)+1}\right) = ln\left(\frac{2+\sqrt{2}}{2}\right)$$

---

18. Solução: Letra E.

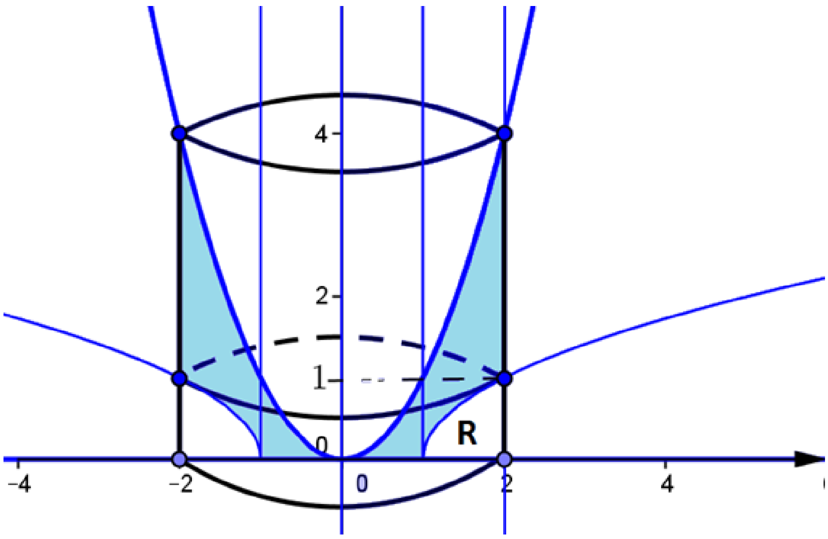
Basta observamos os 3 pontos que indicam máximo ou mínimo local, pois nestes pontos temos que $f'(x_1)=f'(x_2)=f'(x_3)=0$, ou seja, $x_1, x_2\ e\ x_3$ são raízes da derivada. No gráfico observamos que $x_1\ e\ x_2$ são duas raízes entre "a e 0" e x_3 é uma raiz entre "0 e b".

A única opção que pode representar um esboço do gráfico é a letra E.

---

19. Solução: Letra B.

Abaixo visualizamos a representação gráfica das inequações e o sólido gerado (região em azul) pela rotação do conjunto dos pontos comuns.



Volume do cilindro de raio 2 e altura 4:

$$V_{C_1} = \pi.2^2.4 = 16\pi$$

Volume gerado pela rotação da parábola:

$$V_P = \int_0^4 \pi.\left(\sqrt{y}\right)^2 dy = \pi\int_0^4 y dy = \left.\frac{\pi.y^2}{2}\right|_0^4 = 8\pi$$

Volume da região R $\left(V_R\right)$ = Volume do cilindro de altura 1 menos o volume $\left(V_G\right)$ gerado pela rotação do gráfico $y=\sqrt{x-1}$.

i) Volume do cilindro de raio 2 e altura 1:

$$V_{C_2} = \pi.2^2.1 = 4\pi$$

ii) Volume $\left(V_G\right)$ gerado pela rotação do gráfico $y=\sqrt{x-1}$:

$$V_G = \int_0^1 \pi.\left(y^2+1\right)^2 dy = \pi\int_0^1\left(y^4+2y^2+1\right)dy = \pi\left[\frac{y^5}{5}+\frac{2y^3}{3}+y\right]_0^1 = \frac{28}{15}\pi$$

Volume da região R $\left(V_R\right)$:

$$V_R = V_{C_2} - V_G = 4\pi - \frac{28}{15}\pi = \frac{32}{15}\pi$$

O volume do sólido $\left(V_{Sólido}\right)$ será obtido pelo volume do cilindro V_{C_1} menos o volume gerado pela rotação da parábola $\left(V_P\right)$ menos o volume da região R $\left(V_R\right)$, ou seja

$$V_{Sólido} = V_{C_1} - V_P - V_R = 16\pi - 8\pi - \frac{32}{15}\pi = \frac{88}{15}\pi$$

---

20. Solução: Letra E.

Se devemos ter pelo mens 3 incógnitas nulas temos,

1° caso: 3 incógnitas nulas

$C_6^3 = \frac{6!}{3!3!} = 20$, assim $x_4+x_5+x_6=20$

$$\left.\begin{aligned} x_4 &= a+1 \\ x_5 &= b+1 \\ x_6 &= c+1 \end{aligned}\right\rangle a+b+c=17 \Rightarrow P_{19}^{17,2} = \frac{19!}{17!2!} = 171$$

$$C_6^3 \times P_{19}^{17,2} = 20\times171 = 3420$$

2° caso: 4 incógnitas nulas

$$C_6^4 = \frac{6!}{4!(6-4)!} = 15, \text{ assim } x_5 + x_6 = 20$$

$$\left.\begin{matrix} x_4 = a+1 \\ x_5 = b+1 \end{matrix}\right\rangle a+b=18 \Rightarrow P_{19}^{18} = \frac{19!}{18!} = 19$$

$$C_6^4 \times P_{19}^{18} = 15 \times 19 = 285$$

3° caso: 5 incógnitas nulas

$$C_6^5 = \frac{6!}{5!(6-5)!} = 6, \text{ assim } x_6 = 20$$

$$x_4 = a+1 \rangle\, a = 19 \Rightarrow P_{19}^{19} = \frac{19!}{19!} = 1$$

$$C_6^4 \times P_{19}^{19} = 6 \times 1 = 6$$

O total de casos será dado por $3420 + 285 + 6 = 3711$.

Comentário da prova:

A prova de matemática do concurso da escola naval 17/18 comparada com anos anteriores apresentou um nível de dificuldade muito superior deixando os candidatos surpresos. A banca continuou investindo no assunto de cálculo contendo 8 questões, mas soube distribuir bem os assuntos.

A banca falhou em alguns enunciados e, a nosso ver, deverá anular as questões 2, 7, 11, 17, 18 e 19 da prova amarela.

PROVA DE FÍSICA – PROVA AMARELA

Professores:

Maurício
Tiago Luiz
Portes

21. Solução: Letra E.

Inicialmente em t:

$P_1.V_1 = N.R.T$

Em t’: Onde T’ = 2T

$P'.V' = N.R.2T$
$P_2.V_2 = 2\ \boxed{N.R.T}$

Como NRT é o $P_1.V_1$, podemos:

$P_2.V_2 = = 2\ P_1.V_1$

Logo:

$$P_2 = \frac{2.P_1.V_1}{V_2}$$

Como o Volume, em questão é de um cilindro, vamos ter que V = A.h, como a área é a mesma na situação t e t’, pode-se afirmar que V_1 =A.h_1 e V_2 = A.h_2. Fazendo as devidas substituições.

$$P_2 = \frac{2.P_1.V_1}{V_2} = \frac{2.P_1.A.h_1}{A.h_2} = \frac{2.P_1.h_1}{h_2}$$

A pressão exercida na situação t, isto é P1 é a própria pressão atmosférica, já na situação t’, isto é, P2 é a soma da pressão atmosférica com a pressão do corpo, que por sua vez é dado por força sobre área, onde essa força é o peso. Desse modo:

$$\begin{cases} P_1 = P_{atm} = 10^5 \\ P_2 = P_{atm} + P_{corpo} = 10^5 + \frac{F}{A} = 10^5 + \frac{m.g}{A} \end{cases}$$

Substituindo na equação anterior

$$P_2 = \frac{2.P_1.h_1}{h_2}$$
$$10^5 + \frac{m.g}{A} = \frac{2.P_1.h_1}{h_2}$$

Sabendo que:

A = 3 cm² = $3x10^{-4}$ m²
g = 10 m/s²
h1= 12 cm = 12 x 10^{-2} m
h2= 10 cm = 10 x 10^{-2} m

Substituindo na equação anterior, temos:

$$10^5 + \frac{m.10}{3.10^{-4}} = \frac{2.10^5.3.10^{-2}.}{10.10^{-2}}$$

Resolvendo, obteremos a massa igual a 4,2 kg.

---

22. Solução: Letra D.

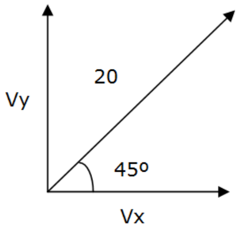
Fragata Independência:

Na direção Y ($\hat{j}$): Temos a velocidade da fragata que vale 15 √2 m/s,a na direção norte (+), em seguida, temos uma correnteza de sentido oposto (-) de velocidade 2 m/s. Desse modo, a velocidade de 1, será dada por:

$$\vec{V_1} = 15\sqrt{2}.\hat{j} - 2\hat{j}$$
$$\vec{V_1} = \left(15\sqrt{2} - 2\right)\hat{j}$$

Fragrata Rademaker:

Como ela tem velocidade 20 nós, na direção nordeste, o interessante seria fazer uma decomposição dessa velocidade nas componentes x e y, como o nordeste está no meio, entre o Norte e Leste, que formam ângulo de 90°, logo o ângulo que o nordeste forma é de 45°.



Sabendo que:

$$\begin{cases} V_x = 20.\cos\theta = 20.\cos 45 = 20.\dfrac{\sqrt{2}}{2} = 10\sqrt{2}\dfrac{m}{s} \\ V_y = 20.sen\theta = 20.sen45 = 20.\dfrac{\sqrt{2}}{2} = 10\sqrt{2}\dfrac{m}{s} \end{cases}$$

Desse modo, a velocidade do navio é de 10√2 na direção X (ou i) e 10√2 na direção Y (ou J). No entanto, nele também se aplica a correnteza de 2 m/s, na direção j, que possui sinal negativo, pois tem sentido oposto. Portanto, temos:

$$\vec{V_2} = 10\sqrt{2}\hat{\imath} + (10\sqrt{2} - 2)\hat{\jmath}$$

Calculando a velocidade relativa da independece com a Rademaker, temos:

$$\vec{V_{12}} = \vec{V_1} - \vec{V_2} = (15\sqrt{2} - 2)\hat{\jmath} - (10\sqrt{2}\hat{\imath} + (10\sqrt{2} - 2)\hat{\jmath})$$
$$\vec{V_{12}} = -10\sqrt{2}\hat{\imath} + 5\sqrt{2}\hat{\jmath}$$

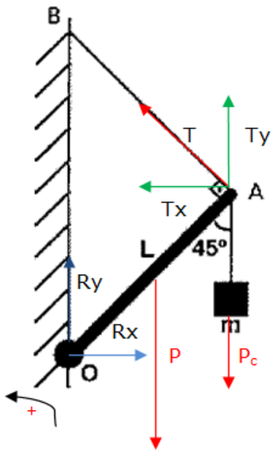
Determinando o módulo:

$$|\vec{V_{12}}| = \sqrt{(10\sqrt{2})^2 + (5\sqrt{2})^2}$$
$$|\vec{V_{12}}| = \sqrt{250} = 15{,}8\ nós$$

23. Solução: Letra C.

Identificando as forças da questão:

- Peso (atua no meio, por que a barra é homogênea);
- Reações (X e Y);
- Trações (x e Y).



Dados:
L = 5,0 m
M = 2kg
T = $15\sqrt{2}$ N
Ry = ?
μ = ?

Calculando todos os momentos e igualando a zero, temos:

$$T.L - P_C.L.sen45 - P.\frac{L}{2}.sen45 = 0$$

$$T.L - P_C.L.sen45 - P.\frac{L}{2}.sen45 = 0 \ \div L$$

$$T - P_C.sen45 - P.\frac{1}{2}.sen45 = 0$$

$$15\sqrt{2} - 20\frac{\sqrt{2}.}{2} - M_B 10.\frac{1}{2}.\frac{\sqrt{2}.}{2} = 0$$

$$M_B = 2kg$$

Logo:

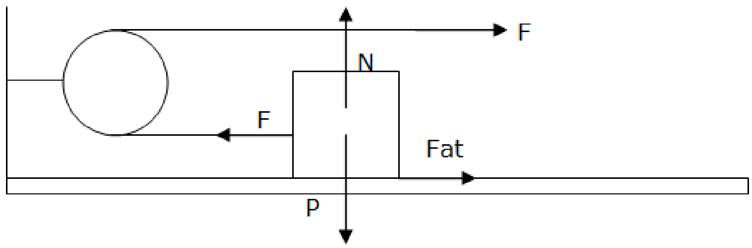
$$\mu_B = \frac{M_B}{L} = \frac{2}{5} = 0{,}4kg/m$$

A soma das forças verticais é zero
$R_y + T_y - P - P_c = 0$
$R_y = P + P_c - T_y$
$R_y = 20 + 20 - 15\sqrt{2}\frac{\sqrt{2}}{2}$
$R_y = 25\ N$

---

24. Solução: Letra D.

Dados:
M_A = 12 kg
M_B = 3 kg
μ_E = 0,3
μ_C = 0,2



Sem deslizamento

$$Fat_{MAX} = \mu_E.m.g$$

$$Fat_{MAX} - F = m_A.a$$

A força resultante sobre o sistema é:

$F = (m_A + m_B).a$

$a = \frac{F}{(m_A + m_B)}$

Substituindo na equação anterior, teremos:

$\mu_E.m.g - F = m_A.\frac{F}{(m_A + m_B)}$

Substituindo valores, temos que:

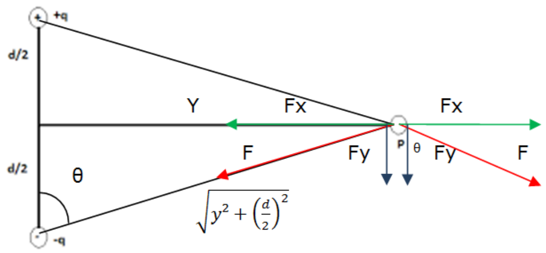
$0{,}3.12.10 - F = \frac{12.F}{12+3}$

Desse modo

F = 20 N

25. Solução: Letra B.

Como as forças elétricas de interação entre as cargas são iguais, iremos chamar de F. Por simetria, suas componentes horizontal e vertical também serão:



As componentes X se anularam, portanto a resultante será 2 Fy = 2. F cos θ

$F = 2.\frac{k.q.Q}{r^2}.\cos\theta$

$$\begin{cases} r = \sqrt{y^2+\left(\frac{d}{2}\right)^2} \\ \cos\theta = \frac{\frac{d}{2}}{\sqrt{y^2+\left(\frac{d}{2}\right)^2}} \end{cases}$$

$$F = 2.\frac{k.q.Q}{\left(\sqrt{y^2+\left(\frac{d}{2}\right)^2}\right)^2}.\frac{\frac{d}{2}}{\sqrt{y^2+\left(\frac{d}{2}\right)^2}}$$

$$F = 2.\frac{10}{y^2+1}.\frac{1}{\sqrt{y^2+1}}$$

$$F = \frac{20}{\sqrt{(y^2+1)^3}}$$

---

26. Solução: Letra E.

$\vec{F_1} + \vec{F_2} = (m_1 + m_2).\vec{a}_{CM}$
$8\hat{\imath} + 6\hat{\jmath} = (2+2).\vec{a}_{CM}$

$8i + 6j = 4.\vec{a}_{CM}$
$\vec{a}_{CM} = 2\hat{\imath} + 1{,}5\hat{\jmath}$

Como

$$\Delta\vec{S} = \vec{V_o}.t + \frac{\vec{a}t^2}{2}$$
$$\Delta\vec{S} = \frac{\vec{a}t^2}{2}$$

$$\Delta\vec{S} = \frac{(2\hat{\imath} + 1{,}5\hat{\jmath}).16}{2}$$
$$\Delta\vec{S} = 16\hat{\imath} + 12\hat{\jmath}$$

---

27. Solução: Letra E.

Podemos escrever a força eletromotriz induzida na barra que desliza através da expressão:

$\mathcal{E} = B.L.V.cos\alpha = 6.1.2.1 = 12\ V$

Aplicando a 1ª Lei de Ohm na barra, poderemos calcular a corrente elétrica que se estabelece:

$$i = \frac{\varepsilon}{R} = \frac{12}{1} = 12\ A$$

Sendo constante a velocidade da barra, podemos garantir que a força resultante sobre ela é nula. Desta forma:

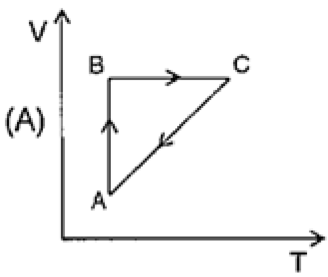
$F = F_m = i.l.B.sen\theta = 12.1.6.1 = 72\ N$

---

28. Solução: Letra A.

AB: Expansão isotérmica
BC: Aquecimento isovolumétrico
CD: compressão/ Resfriamento isobárico.

Reescrevendo isso, num gráfico V x T, temos:



29. Solução: Letra D.

Dados:
V = 220 V
P = 7600 W
V' = 110 V
P' = ?

A potência elétrica pode ser escrita como:

$$P = \frac{V^2}{R}$$

Então:

$$R = \frac{V^2}{P} = \frac{220^2}{7600}$$

Reduzindo a tensão para 110 V, podemos aplicar novamente a equação para o cálculo da nova potência:

$$P' = \frac{V'^2}{R} = \frac{110^2}{\frac{220^2}{7600}} = 1900\ W$$

---

30. Solução: Letra A.

Aplicando a equação fundamental da ondulatória, podemos determinar o comprimento de onda do som.

$$v = \lambda . f \quad \rightarrow \quad 330 = \lambda . 825 \quad \rightarrow \quad \lambda = 0{,}4\ m$$

Podemos então observar que $\lambda = 2.d$

Desta forma, as fontes F1 e F3 chegarão ao ponto P em fase, assim como F2 e F4, visto que a diferença de caminhos percorridos pelas mesmas será um múltiplo inteiro do comprimento de onda. No entanto, as ondas resultantes dessas interferências chegarão ao ponto P em oposição de fase. Portanto, teremos para qualquer ponto P sobre o eixo X uma amplitude resultante nula.

---

31. Solução: Letra B.

A força de atração gravitacional atua como resultante centrípeta. Logo:

$$F_g = F_{cp}$$

$$\frac{G.M.M}{D^2} = M.w^2.R$$

O raio da trajetória é igual a $R = D/2$. Então:

$$\frac{G.M}{D^2} = \left(\frac{2\pi}{T}\right)^2 . \frac{D}{2}$$

$$G.M.T^2 = 2.\pi^2.D^3$$

O vetor velocidade de cada corpo é sempre tangente à trajetória, sendo, portanto, variável. No entanto, a velocidade angular é constante e a energia conservada.

---

32. Solução: Letra C (Passível de Anulação).

$\eta_o = 0{,}6\ (Diurno)$

Diurno:

$$\eta_o = 1 - \frac{T_F}{T_Q}$$

$$0{,}6 = 1 - \frac{T_F}{T_Q}$$
$$\frac{T_F}{T_Q} = 0{,}4$$

Noturno:

$$\eta_1 = 1 - \frac{T'_F}{T'_Q}$$

$$\eta_1 = 1 - \frac{\frac{3}{4}T_F}{\frac{1}{2}T_Q}$$

$$\eta_1 = 1 - \frac{3}{2}.\frac{T_F}{T_Q}$$

$$\eta_1 = 1 - \frac{3}{2}.0{,}4 \quad \rightarrow \quad \eta_1 = 0{,}4$$

Variação percentual

$$\frac{\eta_1 - \eta_o}{\eta_o}.100\%$$

$$\frac{0{,}4 - 0{,}6}{0{,}6}.100\%$$

$$= -33{,}3\%$$

No enunciado não consta o sinal de menos na definição da variação percentual.

---

33. Solução: Letra B.

$$\begin{cases} \rho_{AR} = 1\ kg/m^3 \\ \rho_1 = 10\ kg/m^3 \xrightarrow{Associado\ a} V_1 \\ \rho_2 = 2{,}5 kg/m^3 \xrightarrow{Associado\ a} V_2 \end{cases}$$

Igualando as forças resultantes, temos

$$F_1 = F_2$$

$$P_1 - E_1 = P_2 - E_2$$

$$\rho_1 . g . V_1 - \rho_{Ar} . g . V_1 = \rho_2 . g . V_2 - \rho_{Ar} . g . V_2$$

$$10V_1 - V_1 = 2{,}5. V_2 - V_2 \qquad \div V_1$$

$$10 - 1 = (2{,}5. -1)\frac{V_2}{V_1}$$

$$\frac{V_2}{V_1} = 6$$

---

34. Solução: Letra C (Passível de Anulação) .

LF = 6 cal/g

Pot = 360 W

C= ? (o autor não disse em qual estado físico é)

Se for da líquida, segue a resolução:

Fusão

Q = Pot. Δt=360 x20 = 7200 cal
Q = m. L → 7200 = m. 6 → m = 1200 g

Líquido

Q = Pot. Δt = 360 x(67,5 – 60) = 360 x 7,5 = 2700 cal
Q = m. c. Δθ → 2700 = 1200 . c (400 – 325)
C = 0,03 cal/g °C = 3 mcal/g°C

---

35. Solução: ANULADA.

Podemos determinar o tempo gasto em cada percurso dado:

$$\Delta S_1 = \frac{\Delta S_T}{3} \quad \rightarrow \quad \Delta t_1 = \frac{\frac{\Delta S_T}{3}}{50} = \frac{\Delta S_T}{150}$$

$$\Delta S_2 = \frac{\Delta S_T}{2} \quad \rightarrow \quad \Delta t_2 = \frac{\frac{\Delta S_T}{2}}{75} = \frac{\Delta S_T}{150}$$

$$\Delta S_3 = \frac{\Delta S_T}{6} \quad \rightarrow \quad \Delta t_3 = \frac{\frac{\Delta S_T}{6}}{25} = \frac{\Delta S_T}{300}$$

Desta forma, o tempo total sera:

$$\Delta t_T = \frac{\Delta S_T}{50}$$

Notem então que, se não considerarmos nenhuma parada, a velocidade média será de 50 km/h. O enunciado garante que a mesma foi de 60 km/h. Existe uma inconsistência teórica, pois se houver qualquer parada, a velocidade deverá ser menor que 50.

---

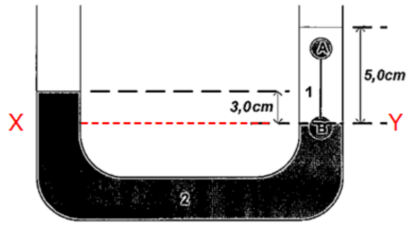
36. Solução: Letra B.

A onda refretada mantém a fase da onda incidente. Uma vez que a onda vai de uma corda mais densa para outra menos densa, não haverá inversão de fase na onda refletida.

---

37. Solução: ANULADA.

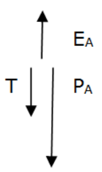
Aplicando principio de steven.



$Px = Py$
$Po + d_1.g.h_1 = Po + d_2.g.h_2$
$5d_1 = 3d_2$

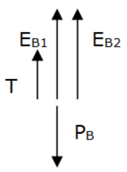
Sendo $d_1 = d$, teremos:
$d_2 = \frac{5}{3}d$

Em A:



$E_A = T + P_A$
$T = E_A - P_A$

Em B:



$E_{B1} + T + E_{B2} = P_B$
$T = P_B - E_{B1} - E_{B2}$

Igualando as trações

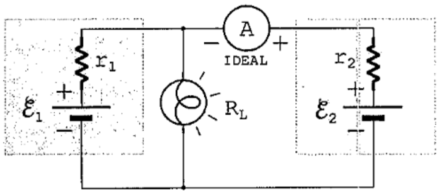
$P_B - E_{B1} - E_{B2} = E_A - P_A$

$$d_B.g.V - d.g.\frac{V}{4} - \frac{5}{3}d.g.\frac{3}{4}V = d.g.V - \frac{2d}{3}gV$$

$$d_B = \frac{11d}{6}$$

Não há alternativa correta.

38. Solução: Letra D.



Como não há passagem de corrente na malha a direita, a fem $\mathcal{E}_2$ será igual a d.d.p. na lâmpada, de resistência R_L.

Teremos uma resistência equivalente igual a:

$$R_{eq} = r_1 + R_L = \frac{1}{3} + \frac{2}{3} \quad \to \quad R_{eq} = 1\,\Omega$$

Portanto:

$$\mathcal{E}_1 = R_{eq}.i \quad \to \quad 1{,}5 = 1.i \quad \to \quad i = 1{,}5\,A$$

Logo a d.d.p. na lâmpada sera:

$$U = \mathcal{E}_2 = R_L.i \quad \to \quad \mathcal{E}_2 = \frac{2}{3}.1{,}5 \quad \to \quad \mathcal{E}_2 = 1{,}0\,V$$

39. Solução: Letra A.

$$\overrightarrow{F_R} = \overrightarrow{F_l} + \overrightarrow{F_M}$$

$$\overrightarrow{F_R} = q\vec{E} + q.V.B$$

Se q = 0, Logo F = 0

40. Solução: Letra D.

T = 4s

A = 2 cm

$$x = A.Sen(w.t)$$

$$x = 2.Sen\left(\frac{2\pi}{T}.t\right)$$
$$x = 2.Sen\left(\frac{2\pi}{4}.t\right)$$

$$x = 2.Sen\left(\frac{\pi}{2}.t\right)$$

$$\frac{x}{2} = Sen\left(\frac{\pi}{2}.t\right)$$

Derivando x,

$$v = 2.\frac{\pi}{2}.cos\left(\frac{\pi}{2}.t\right)$$

$$v = \pi . cos\left(\frac{\pi}{2}.t\right)$$

$$\frac{v}{\pi} = cos\left(\frac{\pi}{2}.t\right).$$

Desse modo,

$$\begin{cases} \frac{x}{2} = Sen\left(\frac{\pi}{2}.t\right) \\ \frac{v}{\pi} = cos\left(\frac{\pi}{2}.t\right) \end{cases}$$

$$\begin{cases} \frac{x^2}{4} = Sen^2\left(\frac{\pi}{2}.t\right) \\ \frac{v^2}{\pi^2} = cos^2\left(\frac{\pi}{2}.t\right) \end{cases}.$$

Somando,

$$\frac{x^2}{4} + \frac{v^2}{\pi^2} = Sen^2\left(\frac{\pi}{2}.t\right) + cos^2\left(\frac{\pi}{2}.t\right)$$

$$\frac{x^2}{4} + \frac{v^2}{\pi^2} = 1$$

$$v^2 = \pi^2\left(1 - \frac{x^2}{4}\right)$$

Comentário da prova:

A prova do concurso da escola naval 17/18 apresentou os seguintes assuntos por incidência, em número de questões:

Calor: 4
Eletricidade: 5
Ondas: 3
Mecanica: 8

A prova de física deste ano comparada com a dos anos anteriores apresentou um nível de dificuldade mais baixo.
A banca falhou em alguns enunciados e deverá anular as questões 35 e 37 da prova amarela.