GABARITO IME

SISTEMA ELITE DE ENSINO

DISCURSIVAS 2017/2018

MATEMÁTICA

Questão 01

Seja o número complexo z que satisfaz a relação $2(z - i)^{2017} = (\sqrt{3} + i)(iz - 1)^{2017}$. Determine z, sabendo-se que $|z| = \dfrac{\sqrt{3}}{3}$.

Gabarito:

$$2 \cdot (z - i)^{2017} = (\sqrt{3} + i) \cdot (iz - 1)^{2017}$$
$$|2| \cdot |z - i|^{2017} = |\sqrt{3} + i| \cdot |iz - 1|^{2017}$$
$$\cancel{2} \cdot |z - i|^{2017} = \cancel{2} \cdot |iz - 1|^{2017}$$
$$|z - i|^{2017} = |i| \cdot |z + i|^{2017}$$
$$|z - i|^{2017} = |z + i|^{2017}$$
$$|z - i| = |z + i|$$

Se $z = a + bi \Rightarrow$

$$|a + bi - i| = |a + bi + i|$$
$$a^2 + (b - 1)^2 = a^2 + (b + 1)^2$$
$$b^2 - 2b + 1 = b^2 + 2b + 1$$
$$\boxed{b = 0}$$

Como $|z| = \dfrac{\sqrt{3}}{3}$

$$\sqrt{a^2 + b^2} = \frac{\sqrt{3}}{3} \Rightarrow a^2 + 0^2 = \left(\frac{\sqrt{3}}{3}\right)^2$$
$$a^2 = \frac{3}{9} \Rightarrow \boxed{a = \pm\frac{\sqrt{3}}{3}}$$

Substituindo $z = a + 0 \cdot i$ na equação original, obtemos:

$$2 \cdot (a + 0i - i)^{2017} = (\sqrt{3} + i) \cdot (i \cdot a - 1)^{2017}$$
$$\frac{(a - i)^{2017}}{(ia - 1)^{2017}} = \frac{\sqrt{3} + i}{2}$$
$$\frac{(a - i)^{2017}}{i^{2017} \cdot (a + i)^{2017}} = \frac{\sqrt{3} + 1}{2}$$
$$\left(\frac{a - i}{a + i}\right)^{2017} = i^{2017} \cdot \frac{\sqrt{3} + i}{2}$$
$$\left(\frac{a - i}{a + i}\right)^{2017} = \frac{-1 + i\sqrt{3}}{2}$$

I) Se $a=\dfrac{\sqrt{3}}{3}$

$$\left(\frac{\frac{\sqrt{3}}{3}-i}{\frac{\sqrt{3}}{3}+i}\right)^{2017}=\left(\frac{\sqrt{3}-3i}{\sqrt{3}+3i}\right)^{2017}=\left(\frac{\frac{1}{2}-\frac{\sqrt{3}}{2}i}{\frac{1}{2}+\frac{\sqrt{3}}{2}i}\right)^{2017}$$

$$=\left(\frac{\text{cis }300^\circ}{\text{cis }60^\circ}\right)^{2017}=(\text{cis }240^\circ)^{2017}=\text{cis }240^\circ-2017=\text{cis }240^\circ$$

$$=-\frac{1}{2}-\frac{i\sqrt{3}}{2}\qquad (\text{F})$$

II) Se $a=-\dfrac{\sqrt{3}}{3}$

$$\left(\frac{-\frac{\sqrt{3}}{3}-i}{-\frac{\sqrt{3}}{3}+i}\right)^{2017}=\left(\frac{\sqrt{3}+3i}{\sqrt{3}-3i}\right)^{2017}=\left(\frac{\frac{1}{2}+\frac{\sqrt{3}}{2}i}{\frac{1}{2}-\frac{\sqrt{3}}{2}i}\right)^{2017}$$

$$=\left(\frac{\text{cis }60^\circ}{\text{cis }-60^\circ}\right)^{2017}=(\text{cis }120^\circ)^{2017}=\text{cis }2017\cdot 120^\circ=\text{cis }120^\circ=-\frac{1}{2}+\frac{i\sqrt{3}}{2}$$

Logo $z=-\dfrac{\sqrt{3}}{3}$

Questão 02

Resolva a inequação abaixo, onde x é uma variável real.

$$2|x^3| - 6x^2 + 3|\,x\,| + 2 < 0$$

Gabarito:

$2 \cdot |x|^3 - 6\,|x|^2 + 3 \cdot |x| + 2 < 0$

Seja $t = |x|$

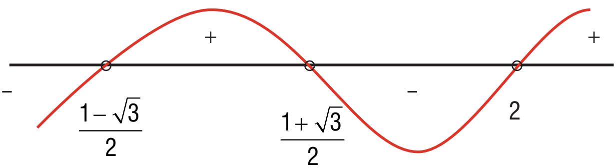
$2 \cdot t^3 - 6t^2 + 3 \cdot t + 2 < 0$

por inspeção 2 é raiz

2	2	–6	3	2
	2	–2	–1	0

$2 \cdot (t - 2) \cdot (2t^2 - 2t - 1) < 0$

$$2 \cdot (t - 2) \cdot \left(t - \frac{1+\sqrt{3}}{2}\right)\left(t - \frac{1-\sqrt{3}}{2}\right) < 0$$



$$t < \frac{1-\sqrt{3}}{2} \text{ ou } \frac{t+\sqrt{3}}{2} < t < 2$$

$$|x| < \frac{1-\sqrt{3}}{2} \text{ ou } \frac{1+\sqrt{3}}{2} < |x| < 2$$

$$-2 < x < -\left(\frac{1+\sqrt{3}}{2}\right) \text{ ou } \frac{1+\sqrt{3}}{2} < x < 2$$

Questão 03

Sabendo que $|x| \le \frac{\pi}{6}$ e que x satisfaz a equação abaixo

$$\frac{3-\cos x(4\cos x+\operatorname{sen} x)}{10\operatorname{sen}^2 x-8\operatorname{sen} x\cos x}=\frac{1}{2}$$

Determine os possíveis valores de x.

Gabarito:

$$\frac{3-\cos x(4\cos x+\operatorname{sen} x)}{10\operatorname{sen}^2 x-8\operatorname{sen} x\cdot\cos x}=\frac{1}{2}$$

$3 - 4\cos^2 x - \operatorname{sen} x \cdot \cos x = 5\operatorname{sen}^2 x - 4\operatorname{sen} x \cdot \cos x$

$3 - 4(\operatorname{sen}^2 x + \cos^2 x) - \operatorname{sen}^2 x + 3\operatorname{sen} x \cdot \cos x = 0$

$-1 - \operatorname{sen}^2 x + 3\operatorname{sen} x \cdot \cos x = 0$

$-(\operatorname{sen}^2 x + \cos^2 x) - \operatorname{sen}^2 x + 3\operatorname{sen} x \cdot \cos x = 0$

$-2\operatorname{sen}^2 x + 3\operatorname{sen} x \cdot \cos x - \cos^2 x = 0$

$2\operatorname{sen}^2 x - 3\operatorname{sen} x \cdot \cos x + \cos^2 x = 0 \ (\div \cos^2 x)$

$2\operatorname{tg}^2 x - 3\operatorname{tg} x + 1 = 0$

$\operatorname{tg} x = 1 \Rightarrow x = 45°$ (solução não é válida)

$\operatorname{tg} x = \frac{1}{2} \Rightarrow \operatorname{arctg} x = \frac{1}{2}$

Questão 04

Sejam a, b, c e d números reais positivos diferentes de 1. Temos que $\log_a d$, $\log_b d$ e $\log_c d$ são termos consecutivos de uma progressão geométrica e que a, b e c formam uma progressão aritmética em que $a < b < c$. Sabendo-se que $b = b^{\log_a b} - a$, determine:

a) Os valores de a, b e c;
b) As razões das progressões aritmética e geométrica, r e q, respectivamente.

Gabarito:

$$\left(\log_b d\right)^2 = \left(\log_a d\right) \cdot \left(\log_c d\right)$$

$$\left(\frac{\log\ d}{\log\ b}\right)^2 = \frac{\log\ d}{\log\ a} \cdot \frac{\log\ d}{\log\ c}$$

$$\left(\log\ b\right)^2 = \log\ a \cdot \log\ c$$

$$\frac{\log\ b}{\log\ a} = \frac{\log\ c}{\log\ b}$$

$$\boxed{\log_a b = \log_b c}$$

$$b = b^{\log_a^b} - a$$

$$b = b^{\log_b^c} - a$$

$$b = c - a,\ b = \frac{a + c}{2}$$

$$\frac{a + c}{2} = c - a$$

$$a + c = 2c - 2a \Rightarrow \boxed{c = 3a}$$

$$\boxed{b = 2a}$$

$$b = b^{\log_a^b} - a$$

$$2a = (2a)^{\log_a^{2a}} - a$$

$$3a = (2a)^{\log_a^{2a}}$$

$$3a = 2^{\log_a^{2a}} \cdot a^{\log_a^{2a}}$$

$$3a = 2^{\log_a^{2a}} \cdot 2a$$

$$\frac{3}{2} = 2^{\log_a^{2a}}$$

$$\frac{3}{4} = 2^{\log_a^{2a} - 1}$$

$$\frac{3}{4} = 2^{\log_a^{2}}, \ a = 2^t$$

$$\frac{3}{4} = 2^{\log_{2t}^{2}} \Rightarrow \frac{3}{4} = 2^{\frac{1}{t}}$$

$$\frac{1}{t} = \log_2^{3/4} \Rightarrow t = \log_{3/4}^{2}$$

$$\boxed{a = 2^{\log_{3/4}^{2}}}$$

$$\boxed{b = 2^{\log_{3/4}^{3/2}}}$$

$$\boxed{c = 3 \cdot 2^{\log_{3/4}^{2}}}$$

$$\boxed{r = 2^{\log_{3/4}^{2}}}$$

$$\boxed{q = \log_{3/2}^{2}}$$

Questão 05

Um ônibus escolar transporta n crianças. Sejam A o evento em que dentro do ônibus tenham crianças de ambos os sexos e B o evento em que há no máximo uma menina dentro do ônibus. Determine o valor de n para que os eventos A e B sejam independentes.

Gabarito:

Probabilidade de todos serem meninas: $\frac{1}{2^n}$

Probabilidade de todos serem meninos: $\frac{1}{2^n}$

Logo: $P(A) = 1 - \frac{1}{2^n} - \frac{1}{2^n} = 1 - \frac{1}{2^{n-1}}$

Para haver no máximo uma menina no ônibus temos dois casos:

1º: Exatamente uma menina $\Rightarrow \frac{1}{2^n} \cdot n\left(\text{definir a menina}\right)$

2º: Nenhuma menina $\Rightarrow \frac{1}{2^n}$

Logo: $P(B) = \frac{1}{2^n} \,.\, n + \frac{1}{2^n} = \frac{1}{2^n} \cdot (n+1)$

Veja que $A \cap B$ é o caso em que existe exatamente uma menina.
Como os eventos são independentes:

$$P(A \cap B) = P(A) \cdot P(B) \Rightarrow \frac{1}{\cancel{2^n}} \cdot n = \left(1 - \frac{1}{2^{n-1}}\right) \cdot \frac{1}{\cancel{2^n}} \cdot (n+1) \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \cancel{n} = \cancel{n} + 1 - \frac{n+1}{2^{n-1}} \Rightarrow n+1 = 2^{n-1}$$

Esta equação claramente só possui a solução n = 3, já que o lado direito cresce mais rápido que o esquerdo.

Questão 06

Seja a matriz $A=\begin{bmatrix} k & -3 \\ 4 & 2 \end{bmatrix}$, com k real.

Determine a faixa de valores de k para que exista uma matriz de números reais P tal que as condições abaixo sejam atendidas simultaneamente:

a) $A^TP + PA = I$ em que A^T é a transposta da matriz A e I é a matriz identidade;
b) P seja simétrica;
c) $p_{11} > 0$, em que p_{11} é o elemento da linha 1 e coluna 1 de P; e
d) $|P| > 0$, em que $|P|$ é o determinante da matriz P.

Gabarito:

1ª Solução

Seja $P=\begin{bmatrix} a & b \\ b & c \end{bmatrix}$ a matriz simétrica do enunciado, temos:

$$A^TP+PA=\begin{bmatrix} k & 4 \\ -3 & 2 \end{bmatrix}\cdot\begin{bmatrix} a & b \\ b & c \end{bmatrix}+\begin{bmatrix} a & b \\ b & c \end{bmatrix}\cdot\begin{bmatrix} k & -3 \\ 4 & 2 \end{bmatrix}=\begin{bmatrix} 2(ka+4b) & -3a+(k+2)b+4c \\ -3a+(k+2)b+4c & 2(-3b+2c) \end{bmatrix}$$

$$\text{Como } A^TP+PA=\text{I}:\begin{cases} ka+4b=1/2 & (1) \\ -3b+2c=1/2 & (2) \\ -3a+(k+2)\,b+4c=0 & (3) \end{cases}$$

$$\begin{matrix} \text{Fazendo } (3)-2\cdot(2): \\ 2\cdot(1): \end{matrix}\begin{cases} -3a+(k+8)\cdot b=-1 \\ 2ka+8b=1 \end{cases}$$

Agora multiplicando a primeira por $2k$, a segunda por 3 e somando:

$$2(k^2+8k+12)b=3-2k\Rightarrow b=\frac{3-2k}{2(k+2)(k+6)}\,;\,k\neq-2 \text{ e } k\neq-6$$

$$\text{Substituindo em (2)}: 2c=\frac{1}{2}+3b=\frac{1}{2}+\frac{9-6k}{2(k+2)(k+6)}=\frac{k^2+2k+21}{2(k+2)(k+6)}$$

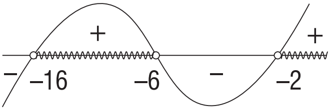
$$\text{Logo}: c=\frac{k^2+2k+21}{4(k+2)(k+6)}$$

Substituindo em (3): $3a=(k+2)b+4c$

$$3a=\frac{-2k^2-k+6}{2(k+2)(k+6)}+\frac{2k^2+4k+42}{2(k+2)(k+6)}=\frac{3k+48}{2(k+2)(k+6)}$$

$$\Rightarrow a=\frac{k+16}{2(k+2)(k+6)}$$

$$\text{Agora como } p_{11}=a>0: \frac{k+16}{2(k+2)(k+6)}>0$$



$-16 < k < -6$ ou $k > -2$

Além disso, $|P| > 0 \Leftrightarrow ac - b^2 > 0 \Leftrightarrow$

$$\Leftrightarrow \frac{(k+16)(k^2+2k+21)}{8(k+2)^2(k+6)^2} - \frac{(3-2k)^2}{4(k+2)^2(k+6)^2} > 0$$

Multiplicando por $8(k+2)^2(k+6)^2$, que é positivo:

$k^3 + 10k^2 + 77k + 318 > 0$

$$\begin{array}{c|cccc} & 1 & 10 & 77 & 318 \\ \hline -6 & 1 & 4 & 53 & 0 \end{array} : (k+6)(k^2+4k+53) > 0$$

Como $k^2 + 4k + 53 > 0;\ \forall k \in \mathbb{R}$, devemos ter: $k > -6$

Fazendo a interseção dos intervalos temos:

$k > -2$ ou seja $k \in (-2, +\infty)$

2ª Solução

$A^T P + PA = \mathrm{I}$

$(PA)^T + PA = \mathrm{I}$

$$PA = \begin{pmatrix} \frac{1}{2} & c \\ -c & \frac{1}{2} \end{pmatrix}$$

$$\text{Det } PA = \frac{1}{4} + c^2 > 0 \Rightarrow \exists A^{-1}$$

$$P = \begin{pmatrix} \frac{1}{2} & c \\ -c & \frac{1}{2} \end{pmatrix} \cdot A^{-1}$$

$$P = \begin{pmatrix} \frac{1}{2} & c \\ -c & \frac{1}{2} \end{pmatrix} \cdot \frac{\begin{pmatrix} 2 & 3 \\ -4 & k \end{pmatrix}}{2k+12}$$

$$P = \frac{\begin{pmatrix} 1-4c & \frac{3}{2}+ck \\ -2c-2 & -3c+\frac{k}{2} \end{pmatrix}}{2k+12}$$

$$P = \begin{pmatrix} \dfrac{1-4c}{2k+12} & \dfrac{3/2 + ck}{2k+12} \\ \dfrac{-2c-2}{2k+12} & \dfrac{-3c + k/2}{2k+12} \end{pmatrix}$$

Simétrica $\Rightarrow$

$$-2c - 2 = \frac{3}{2} + ck$$

$$-\frac{7}{2} = c(k+2)$$

$$\boxed{c = -\frac{7}{2k+4}}$$

$$a_{11} = \frac{k+16}{(k+2)(2k+12)}$$

$$\text{Det } P = \frac{c^2 + 1/4}{\text{Det } A}$$

$$\text{Det } P > 0 \Rightarrow \text{Det } A > 0 \Rightarrow 2k + 12 > 0 \Rightarrow \boxed{k > -6}$$

$$a_{11} > 0 \Rightarrow \boxed{k > -2}$$

$$k > -2 \cap k > -6 \Rightarrow \boxed{(-2, +\infty)}$$

Questão 07

Determine todos os números primos p, q e r tais que $35p + 11pq + qr = pqr$.

Gabarito:

$35p + 11pq + qr = pqr \Leftrightarrow 35 + 11q + \frac{qr}{p} = qr \Leftrightarrow \frac{qr}{p} = qr - 35 - 11q,$ como o membro da direita é uma soma de inteiros e o membro da esquerda é inteira, e como p, q e r são primos, temos quatro casos a considerar:

$p = q$, $p = -q$, $p = r$ e $p = -r$.

1º caso $p = q$
$r = qr - 35 - 11q \Leftrightarrow (q-1)(r-11) = 46 \Leftrightarrow F \Leftrightarrow S_1 = \varnothing$

Não há soluções (p, q, r) para p, q e r primos.

2º caso $p = -q$
$-r = qr - 35 - 11q \Leftrightarrow (q+1)(r-11) = 24 \Leftrightarrow S_2 = \{(2, -2, -13); (-3, 3, 17); (5, -5, 5); (-11, 11, 13)\}$

3º caso $p = r$
$q = qr - 35 - 11q \Leftrightarrow q(r-12) = 35 \Leftrightarrow S_3 = \{(19, 5, 19); (5, -5, 5); (17, 7, 17); (7, -7, 7)\}$

4º caso $p = -r$
$-q = qr - 35 - 11q \Leftrightarrow q(r-10) = 35 \Leftrightarrow S_4\ \{(-17, 5, 17); (-3, -5, 3); (-5, -7, 5)\}$

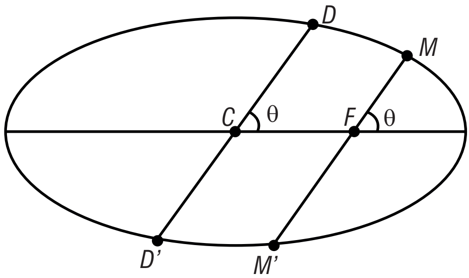
Todas as soluções (p, q, r) pertencem ao conjunto $S = S_1 \cup S_2 \cup S_3 \cup S_4$.

Obs.: Se considerarmos como primos somente os números positivos de dois divisores positivos o conjunto solução será $S = \{(19, 5, 19); (17, 7, 17)\}$

Questão 08

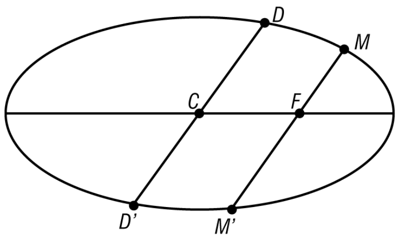
Considere a elipse abaixo, onde *DD'* é uma corda passando pelo seu centro, *MM'* uma corda focal e o eixo maior da elipse é $2a$. Prove que:

$$DD'^2 = MM' \,.\, 2a$$



Gabarito:

1ª Solução:



Sem perda de generalidade considere a elipse centrada na origem e F o foco de coordenadas (C, 0).

Como $\overleftrightarrow{DD'}$ passa pela origem, $\overleftrightarrow{DD'}: y = mx$.

$\overleftrightarrow{MM'} \,//\, \overleftrightarrow{DD'}$ e $F \in \overleftrightarrow{MM'} \Rightarrow \overleftrightarrow{MM'}: y = mx - mc$.

Elipse: $\dfrac{x^2}{a^2} + \dfrac{y^2}{b^2} = 1$

Para achar D e D' faremos $\overleftrightarrow{DD'}$ interseção com a elipse.

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{m^2x^2}{b^2} = 1 \Rightarrow x^2 = \frac{a^2b^2}{a^2m^2 + b^2} \Rightarrow (DD')^2 = \frac{4a^2b^2}{a^2m^2 + b^2} \cdot (m^2 + 1)$$

Para achar M e M' faremos $\overleftrightarrow{MM'}$ interseção com a elipse:

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{m^2x^2 - 2m^2cx + m^2c^2}{b^2} = 1 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow (b^2 + a^2m^2)\,x^2 - 2m^2ca^2x + a^2m^2c^2 - a^2b^2 = 0.$$

Veja que x_m e $x_{m'}$ são raízes dessa equação.

Agora: $MM' = \sqrt{(x_M - x_{M'})^2 + (y_M - y_{M'})^2} = \sqrt{(x_M - x_{M'})^2 + (mx_M - mx_{M'})^2} =$

$= \sqrt{m^2 + 1} \cdot |x_M - x_{M'}|$

Porém, numa equação de 2º grau a diferença das raízes é $\dfrac{\sqrt{\Delta}}{a}$

$$\Delta = 4m^4c^2a^4 - 4 \cdot (b^2 + a^2m^2)(a^2m^2c^2 - a^2b^2)$$

$$= 4 \cdot \left(\cancel{m^4c^2a^4} - b^2a^2m^2c^2 + a^2b^4 - \cancel{a^4m^4c^2} + a^4b^2m^2\right)$$

$$= 4a^2b^2 \cdot \left(\underbrace{-m^2c^2 + a^2m^2}_{m^2b^2} + b^2\right) = 4a^2b^4 \cdot (m^2 + 1)$$

Assim, $MM' = \sqrt{m^2 + 1} \cdot \dfrac{2ab^2 \cdot \sqrt{m^2 + 1}}{a^2m^2 + b^2} = \dfrac{2ab^2}{a^2m^2 + b^2} \cdot (m^2 + 1)$, donde: $MM' \cdot 2a = DD'^2$.

2ª Solução:

Sabe-se que os comprimentos dos raios focais são dados pelas expressões

$FM = \dfrac{p}{1 + e\cos\theta}$ e $FM' = \dfrac{p}{1 - e\cos\theta}$, sendo $p = \dfrac{b^2}{a}$ o parâmetro e $e = \dfrac{c}{a}$ a excentricidade,

assim $MM' = FM + FM' = \dfrac{2p}{1 - e^2\cos^2\theta} = \dfrac{2ab^2}{a^2 - c^2\cos\theta}$ e $2aMM' = \dfrac{4a^2b^2}{a^2 - c^2\cos^2\theta}$. (1)

Sem perda de generalidade, se a equação da elipse for $\varepsilon = \dfrac{x^2}{a^2} + \dfrac{y^2}{b^2} = 1$, com $a^2 = b^2 + c^2$ e $D = (x_0, y_0)$,

temos que:

$x_0 = CD \cdot \cos\theta$, $x_0^2 + y_0^2 = CD^2$ e $\dfrac{x_0^2}{a^2} + \dfrac{y_0^2}{b^2} = 1$, assim $\dfrac{(CD \cdot \cos\theta)^2}{a^2} + \dfrac{CD^2 - (CD \cdot \cos\theta)^2}{b^2} = 1 \Leftrightarrow$

$CD^2\left(\dfrac{\cos^2\theta}{a^2} + \dfrac{1 - \cos^2\theta}{b^2}\right) = 1 \Leftrightarrow CD^2 = \dfrac{a^2b^2}{a^2 - (a^2 - b^2)\cos^2\theta} = \dfrac{a^2b^2}{a^2 - c^2\cos^2\theta}$.

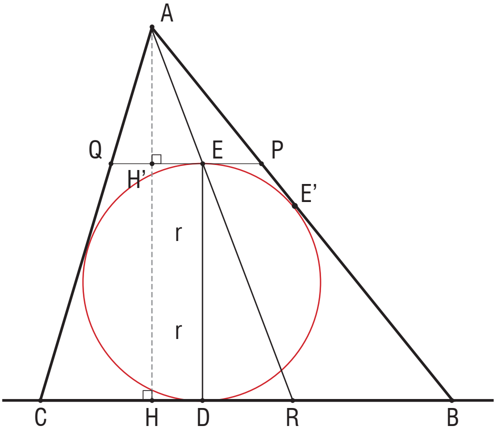
Como $CD = \dfrac{DD'}{2}$, $DD^2 = \dfrac{4a^2b^2}{a^2 - c^2\cos^2\theta}$. (2)

Das equações (1) e (2) vemos que $DD'^2 = MM' \cdot 2a$

Questão 09

Considere um triângulo ABC onde BC $= a$, AB $= c$, AC $= b$, $c > b$. O círculo inscrito a esse triângulo tangencia BC em D e DE é um diâmetro desse círculo. A reta que tangencia o círculo e que passa por E intercepta AB em P e AC em Q. A reta AE intercepta BC no ponto R. Determine os segmentos de reta EQ e DR em função dos lados do triângulo: a, b e c.

Gabarito:



Seja H o pé da altura de ABC, e $\overline{\text{AH}} = h_a$.

Por áreas temos: $\text{S} = \text{P} \cdot r$ e $\text{S} = \dfrac{a \cdot h_a}{2} \cdot \left(\text{com } P = \dfrac{a+b+c}{2} \right)$

Logo: $\boxed{r = \dfrac{\text{S}}{\text{P}}}$ e $\boxed{h_a = \dfrac{2\text{S}}{a}}$

Pela semelhança $\Delta\text{ABC} \cong \Delta\text{AQP}$ temos:

$$\frac{a}{\text{QP}} = \frac{b}{\text{QA}} = \frac{c}{\text{AP}} = \frac{\text{AH}}{\text{AH'}} \text{ (I)}$$

Como AH' $= h_a - 2$r e $\dfrac{\text{AH'}}{\text{AH}} = \dfrac{h_a - 2r}{h_a} = \dfrac{\dfrac{2S}{a} - \dfrac{2S}{P}}{\dfrac{2S}{a}} = \dfrac{P-a}{P}$, substituindo em (I):

$$\boxed{\text{QP} = \frac{a(\text{P}-a)}{\text{P}}} \quad \boxed{\text{QA} = \frac{b(\text{P}-a)}{\text{P}}} \quad \boxed{\text{AP} = \frac{c(\text{P}-a)}{\text{P}}}$$

Sendo E' o ponto de tangência temos:

AE' $= (P - a)$ e PE $=$ PE' $=$ AE' $-$ AP $= (P - a) - \dfrac{c(P-a)}{P} = \dfrac{(P-a)(P-c)}{P}$

Logo QE $=$ QP $-$ EP $= \dfrac{a(p-a)}{p} - \dfrac{(p-a)(p-c)}{p} = \dfrac{(p-a)(p-b)}{p}$

Pela semelhança $\Delta AEP \cong \Delta ARB$:

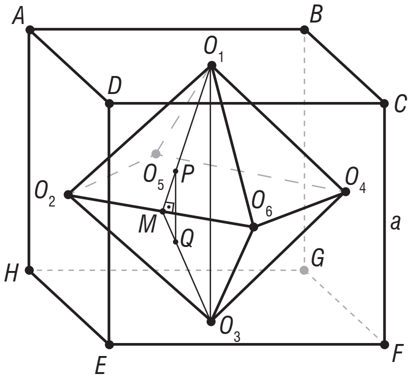
$$\frac{AP}{c} = \frac{PE}{RB} \Leftrightarrow RB = \frac{PE \cdot c}{AP} = \frac{\cancel{(P-a)}\,(P-c)}{\cancel{p}} \cdot \frac{\cancel{c}}{\dfrac{\cancel{c}\,\cancel{(P-a)}}{\cancel{P}}} = P - c$$

Temos também: BD $= P - b$ e DR $=$ DB $-$ RB $= P - b - (P - c) = c - b$

Questão 10

Seja um cubo regular, onde os centros de suas faces são vértices de um octaedro. Por sua vez, os centros das faces deste octaedro formado são vértices de outro cubo. Obtendo consecutivamente octaedros e cubos infinitamente, determine a razão da soma do volume de todos os poliedros inscritos pelo volume do cubo inicial.

Gabarito:



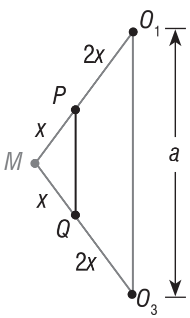
I - Cálculo do volume do 1º cubo inscrito

Seja: P - centro da face $O_1O_2O_6$ do octaedro;

Q - *centro da face* $O_2O_6O_3$ do octaedro;

P e Q são baricentros das suas respectivas faces $\Rightarrow$ $\overline{O_1P} = \overline{2PM}$

onde M é ponto médio e O_2O_6 $\quad \overline{O_3Q} = \overline{2QM}$



Seja $\overline{PQ}$ a aresta do 1º cubo inscrito

$$\Rightarrow \frac{\overline{PQ}}{\overline{O_1O_3}} = \frac{\overline{MP}}{\overline{MO_1}} \Rightarrow \frac{\overline{PQ}}{a} = \frac{1}{3} \Rightarrow PQ = a/3$$

$\Rightarrow$ a aresta do 1º cubo inscrito é $a/3 \Rightarrow V_{c_1} = \dfrac{a^3}{27}$ onde V_{cj} é o volume do vigésimo cubo inscrito.

II - Observe que o volume de cada octaedro inscrito é $\dfrac{a_{j-1}^3}{6}$, onde a_{j-1} é a aresta do cubo circunscrito a esse octaedro $\Rightarrow$

$$V_{O_1} = a^3/6 ; V_{O_2} = \frac{(a/3)^3}{6} ; V_{O_3} = \frac{(a/3^2)^3}{6} \Rightarrow \dots \Rightarrow V_{oj} = \frac{(a/3^{j-1})^3}{6}$$

$$\Rightarrow V_{oj} = \frac{a^3}{6} \cdot \left(\frac{1}{3^{3j-3}}\right)$$

Já o volume de cada cubo inscrito é $(aj)^3$ onde $a_j = \frac{a}{3^j} \Rightarrow V_{c_1} = \left(\frac{a}{3}\right)^3 \Rightarrow$

$$\Rightarrow V_{c_2} = \left(\frac{a}{3^2}\right)^3 \Rightarrow V_{c_3} = \left(\frac{a}{3^3}\right)^3 \Rightarrow \dots V_{c_j} = \left(\frac{a}{3^j}\right)^3$$

III - Soma do volume de todos os poliedros inscritos, inclusive do 1º octaedro:

$$V_{\text{total}} = \underbrace{\sum_{j=1}^{\infty} \left(\frac{a}{3^j}\right)^3}_{\text{volume dos cubos}} + \underbrace{\sum_{j=0}^{\infty} \frac{1}{6} \cdot \left(\frac{a}{3^j}\right)^3}_{\text{volume dos octaedros}}$$

$$\sum_{j=1}^{\infty} \frac{a^3}{3^{3j}} = a^3 \cdot \frac{1/27}{1 - 1/27} = a^3/26$$

$$\sum_{j=0}^{\infty} \frac{a^3}{6} \cdot \frac{1}{3^{3j}} = \frac{9a^3}{52}.$$

$$V_{\text{total}} = \frac{a^3}{26} + \frac{9a^3}{52} = \frac{2a^3 + 5a^3}{52} = \frac{11a^3}{52}$$

$$\frac{V_{\text{total}}}{V_{\text{cubo}}} = \frac{\frac{11a^3}{52}}{a^3} = \frac{11}{52}$$

Comentário:

Tradicionalmente, a prova de matemática do IME apresenta elevado grau de dificuldade, fazendo com que os alunos se deparem com um vestibular cada vez mais trabalhoso.

Destacamos as questões 1, 6 e 7 como sendo as mais difíceis. Apesar destas, questões como bastante acessíveis as de número 2 e 10.

Parabenizamos a banca pela prova, que uma vez mais privilegia e seleciona os melhores alunos do Brasil.

Professores:

Álvaro de Jesus
Anderson Izidoro
Bruno Pedra
Elisama
Êurope Gorito
Genilson
Jordan Piva
Marcelo Xavier
Rafael Sabino
Sandro Davison